Exercice :(4 points)

On considère les intégrales suivantes : $I_1= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ et $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$

1) Calculer I_1 et $I_1+ I_2$

2) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x)= \frac{\sin(2x)}{1+2\sin x}$

a) Vérifier que $f(\pi - x) = - f(x)$

b) Déduire $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$

Exercice (4points)

Répondre par Vrai ou Faux

I)Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1) a) La suite (I_n) n'est monotone b) La suite (I_n) est décroissante

2) a) $I_1 = 1$ b) $I_{n+1}= e - (n+1)I_n$

3) a) Pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$

b) Pour tout entier naturel non nul n, $I_n \leq \frac{e}{n+1}$

4) a) (I_n) est convergente b) $\lim_{n\to+\infty} I_n= 1$

Exercice (6points)

A) Soit g la fonction définie sur $]0 , +\infty[$ par : $g(x) = x +(x - 2)\ln x$.

1)a- Montrer que pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x$.

b- En déduire que pour tout réel $x > 1$, $g'(x) > 0$.

2)a- Dresser le tableau de variation de g.

b- En déduire que pour tout réel $x > 0$, $g(x) \geq 1$.

B) Soit f la fonction définie sur $]0 , +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln x – (\ln x)^2$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2 cm)

1)a- Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

2)a- Écrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

b- Montrer que pour tout $x > 0$, $x – 1 – \ln x \geq 0$.

c- Étudier alors la position de C par rapport à T.

3)a- Montrer que f réalise une bijection de $]0 , +\infty[$ dans IR.

On désigne par C ' la courbe de la réciproque de f.

b- Tracer, dans le même repère, les courbes C et C '.

Exercice 4 :(6points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré direct de centre O et soit f la similitude directe qui transforme B en O et A en D.

1) a)Déterminer le rapport et l'angle de f.

b)Vérifier que C est le centre de f .

2) Soit α un réel non nul (pour la figure $\alpha = \frac{1}{3}$). On considère les points M et N

définis par $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = (2-\alpha)\overrightarrow{AD}$ et on note I le milieu de [MN]

a) Montrer que $\overrightarrow{DI} = \alpha\,\overrightarrow{DO}$. (On remarquera que $2\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DN}$)

b) En déduire que f(M) = I.

3) On suppose $\alpha \neq 2$.

Le cercle de centre I passant par C recoupe la droite (CD) en un point E.

On considère la similitude directe g de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a)Montrer que le triangle AIE est rectangle en I, isocèle et direct.

b)En déduire que g (I) = E

4) a)Caractériser g o f.

b)Déduire que $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BD}$

MR : LATRACH — Contrôle II — 2009 / 2010

Exercice 1 :

	1		2			3		
4x0,5	a	b	a	b	c	a	b	c
	F	V	V	V	V	V	F	F

Exercice 2 :

1) a) Vérification.

$$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{2}{t^2-1}$$

b) Calcul de I.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{t^2-1}\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt$$
$$= \Big[\ln|t-1| - \ln(1+t)\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - \ln\left(\tfrac{3}{2}\right)$$
$$= -\ln(3).$$

2) a) Dérivabilité de F et Calcul de $F'(x)$

- $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{t}}{t-1}$ est d sur $[0,+\infty[\setminus\{1\} = J$
- $x \longmapsto x^2$ est d sur $[0,1[$
- $\forall x \in]0,1[\,;\ [0,x^2] \subset [0,1[\subset J$
- $0 \in [0,1[\subset J$

$\Rightarrow$ F est dérivable sur $[0,1[$

et $F'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2-1}\cdot 2x$

$= 2\cdot\dfrac{x^2}{x^2-1}$; $x \in [0,1[$

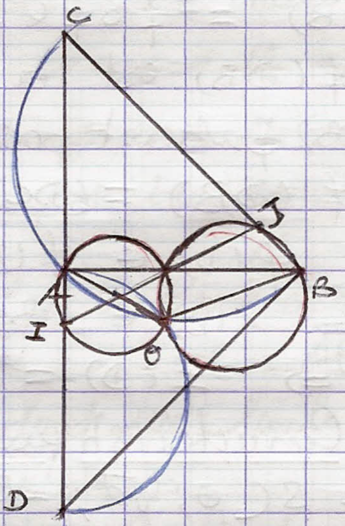
b) Expression de $F(x)$

$$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)\,dt$$
$$\Rightarrow F(x) = \int_0^x \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt,\ x\in[0,1[$$

c) Calcul de $F(\frac{1}{2})$

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t^2-2+2}{t^2-1}\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2 + \frac{2}{t^2-1}\,dt$$
$$= 1 + I$$
$$= 1 - \ln(3)$$
$$= \ln\left(\tfrac{e}{3}\right).$$

Exercice 3



1) a) Voir figure

b) Rapport et Angle de f.

Rapport $k = \dfrac{BD}{AB}$

$= \dfrac{BC}{AB}$

$= \sqrt{2}.$

Angle $\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}})\ (2\pi)$

$\equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}})\ (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi).$

c) $f(D) = C$

1st way: $\begin{cases} \cdot \dfrac{BC}{AD} = \sqrt{2} \\ \cdot (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4} (2\pi) \\ \cdot f(A) = B \end{cases}$

$\Rightarrow f(D) = C$

2nd way:

$D \in (DA) \cap (DB)$

• $(DA) \perp (AB) \Rightarrow f(DA) \perp (BD)$ et $B \in f(DA)$

Alors $f(AD) = (BC)$.

• $f(DB) = f \circ f(AB)$

D'où $f(DB)$ est la perpendiculaire à (AB) passant par $f(B) = D$

$\Rightarrow f(DB) = (DC)$

Par suite $f(D) \in f(DA) \cap f(DB)$

$\Rightarrow f(D) \in (BC) \cap (DC)$

$\Rightarrow f(D) = C$

2) a) Caractéristique de $f \circ f$.

$f = S(O; \sqrt{2}; -\frac{3\pi}{4})$

$\Rightarrow f \circ f = S(O, 2; \frac{\pi}{2})$

b) Construction du pt O.

• $f \circ f(A) = D \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Rightarrow O \in \overset{\frown}{DA}$ du $\mathcal{C}_{[AD]}$

• $f \circ f(B) = C \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Rightarrow O \in \overset{\frown}{CB}$ du $\mathcal{C}_{[BC]}$

D'où $O \in \overset{\frown}{CB} \cap \overset{\frown}{DA} \setminus \{A\}$

car $f(A) = B$.

3) a) K, A, B alignés:

$(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KO}}) + (\widehat{\overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KB}}) (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} (2\pi)$ car $\begin{cases} K \in \mathcal{C}_{[OA]} \\ K \in \mathcal{C}_{[OB]} \end{cases}$

$\equiv \pi (2\pi)$

$\Rightarrow K \in (AB)$

b) $f(I) = J$

$I \in (AC) \cap \mathcal{C}_1$

$\Rightarrow f(I) \in f(AC) \cap f(\mathcal{C}_1)$

$\begin{cases} \cdot f(AC) = f(AD) = (BC) \\ \cdot f([OA]) = [OB] \Rightarrow f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2 \end{cases}$

$\Rightarrow f(I) \in (BC) \cap \mathcal{C}_2$

$\Rightarrow f(I) \in \{J, B\}$

or $f(A) = B$

$\Rightarrow f(I) = J$.

c) I, J, K Alignés.

$(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KA}}) + (\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}}) + (\widehat{\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KJ}}) (2\pi)$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}) + \pi + (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OJ}}) (2\pi)$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}) + \pi - (\widehat{\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB}}) (2\pi)$

Comme $\left.\begin{array}{l} f(O) = O \\ f(I) = J \\ f(A) = B \end{array}\right\} (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB}}) (2\pi)$

D'où $(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}}) \equiv \pi (2\pi)$.

$\begin{pmatrix} O, I, A, K \in \mathcal{C}_1 \\ O, J, B, K \in \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}$

par suite K, I, et J sont alignés.

Exercice 4.

1) a) Sens de variation de f.

- $t \overset{u}{\longmapsto} \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow$ f est la primitive de u sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $f'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

Si $x \in]0,1]$; $f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ f est st décroissante sur $]0,1]$

Si $x > 1$; $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ f est st croissante sur $[1;+\infty[$

b) Signe de f(x).

- $\left.\begin{array}{l} x \geq 1 \\ \text{f est st croissante} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$

- $\left.\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ \text{f est st décroissante} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$

D'où $f(x) \geq 0$, pour tout $x > 0$

2) Calcul $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$.

on pose $u(t) = \ln(t) \to u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2} \to v(t) = -\frac{1}{t}$

u', v' sont continues sur $]0,+\infty[$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \left[-\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$= 1 - \frac{1+\ln x}{x}$$

b) Encadrement de f(x).

$t^2 \leq 1+t^2 \leq 2t^2$; $t \geq 1$

$\Rightarrow \frac{\ln t}{2t^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$, $t \geq 1$

$\left.\begin{array}{l} t \longmapsto \frac{\ln t}{2t^2} \\ t \longmapsto \frac{\ln t}{1+t^2} \\ t \longmapsto \frac{\ln t}{t^2} \end{array}\right\}$ sont continues sur $[1;+\infty[$.

$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{2t^2}\,dt \leq f(x) \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$; $x \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ $(x \geq 1)$

c) Existence et Encadrement de l.

$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f(x) \leq 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) \\ \Rightarrow f(x) \leq 1 \text{ ; pour tout } x \geq 1 \\ \bullet\ \text{f est st croissante sur } [1;+\infty[\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ f est ~~continue~~ majorée et st croissante sur $[1;+\infty[$ Alors f admet une limite finie l en $+\infty$.

et comme $\left\{\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \\ \bullet \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq l \leq 1$.

~~3) Prolongement par continuité de f~~

3) a) $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, $x > 0$

on pose $\varphi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$

$$\begin{cases} \cdot\ x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ est } d^{\underline{ble}} \text{ sur }]0,+\infty[\\ \cdot\ f \text{ est } d^{\underline{ble}} \text{ sur }]0,+\infty[\\ \cdot\ \forall x>0;\ \frac{1}{x} \in]0,+\infty[\end{cases}$$

$\Rightarrow$ φ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et on a : $\varphi'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} - f'(x)$

$$= \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2} - \frac{\ln x}{1+x^2}$$

$$= \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{\ln x}{1+x^2}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \varphi(x) = \text{cste}$
$= \varphi(1)$
$= 0$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x),\ x>0$

b) Prolongement par continuité de f en 0

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \cdot \lim\limits_{+\infty} f(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \ell$$

OR. $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ell$

par suite f est prolongeable par continuité en 0^+.

4) a) Variation de h sur $]0,1]$

. h est dérivable sur $]0,1]$

. $h'(x) = g'(x) - \frac{1}{2}(\ln x)$

$= \frac{\ln x}{2(1+x^2)}(1-x^2) \leq 0;\ x\in]0,1]$

x	0		1
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	ℓ	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

b) $g(x) - \ell \leq (x\ln x - x),\ x\in]0,1]$

$$\begin{cases} \cdot\ h \text{ continue sur }]0,1] \\ \cdot\ h \text{ st décroissante sur }]0,1] \\ \cdot\ h(]0,1]) = [\frac{1}{2}, \ell[\end{cases}$$

$\Rightarrow$ h réalise une bij de $]0,1]$ sur $[\frac{1}{2},\ell[$

D'où $\forall x\in]0,1]$; $h(x) \leq \ell$

$\Rightarrow g(x) - \frac{1}{2}(x\ln x - x) \leq \ell$

$\Rightarrow g(x) - \ell \leq \frac{1}{2}(x\ln x - x)$

c) Dérivabilité de g en 0^+

. $\lim\limits_{0^+} \frac{g(x)-\ell}{x} = ?$

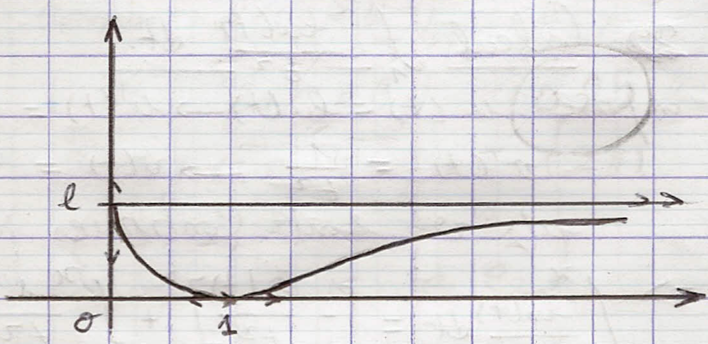
$$\begin{cases} \cdot\ \frac{g(x)-\ell}{x} \leq \frac{1}{2}(\ln x - 1) \\ \cdot\ \lim\limits_{0^+} \frac{1}{2}(-1+\ln(x)) = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{0^+} \frac{g(x)-\ell}{x} = -\infty$

$\Rightarrow$ g n'st pas $d^{\underline{ble}}$ en 0^+

et $\mathcal{C}_g$ admet une $\frac{1}{2}$ tgte verticale au pt d'abscisse 0.

d) Allure de la Courbe $\mathcal{C}$ de g.



The END